# DISSERTATIO ASTRONOMICA

DE

# METHODIS QUIBUSDAM TRIGONOMETRICIS, INVENIENDI ANOMALIAM PLANETARUM VERAM, DATA ANOMALIA EORUM MEDIA;

QUAM

*Conf. Ampl. Fac. Phil. Aboëns.*

*Publicæ cenfuræ fubmittunt*


MAGNUS ALOPÆUS,

PHILOS. MAG.

ET

GUSTAVUS STRENG,

NYLANDUS.


In Aud. Maj, die 31 Maji 1797.

Horis a. m: Solitis.

---


ABOÆ, TYPIS FRENCKELLIANIS.

IN SACRAM REGIAM MAJESTATEM

SPECTATÆ FIDEI VIRO,

*Diœceſeos Borgoënſis Archi-Præpoſito, Eccleſiarum quæ in Borgo, Aſkola, Borgnäs & Pukkila Deo colliguntur, Paſtori,*

MAXIME REVERENDO ATQUE AMPLISSIMO

DOMINO

*Mag. MAGNO JACOBO ALOPAEO,*

*Patri Indulgentisſimo,*

Pagellas haſce ſubmiſſe offert

*Patris Optimi*

*filius obſequentisſimus*
*MAGNUS ALOPAEUS.*

## §. I.

Veram orbitarum Planetarum figuram nemo ante KEPLERUM notam sibi habuit. Ille primus demonstravit, Planetas motu suo Ellipses describere circa Solem, in uno focorum quiescentem, & ita quidem illas describere, ut areæ, quas verrunt radii vectores a Sole ad Planetam ducti, semper sint temporibus proportionales. Emendanda igitur erat methodus, qua antiqui Astronomi, Planetas in circulis ferri credentes, Planetarum loca pro quovis tempore determinare conabantur. Sit S, focus Ellipseos APB, a Sole occupatus; alter focus F; A, Aphelium, seu locus ubi maxima est Planetæ a Sole distantia; B Perihelium, ubi distantia a Sole est minima; P locus Planetæ in orbita verus ad tempus datum; erit area APS seu BPS, prout vel Aphelium vel Perihelium pro origine Anomaliarum habetur (*) ad totam El-

A lipsin,

(*) Et vulgo quidem Anomaliæ ab Aphelio supputantur; DE LA HIRE vero, NEWTON & DE LA CAILLE illas etiam a Perihelipfin, ut tempus quo percurritur AP vel BP ad totum tempus Periodicum. Ut ergo determinari posfit P, locus Planetæ in orbita verus, invenienda eft ratio anguli PSA vel PSB ad quatuor rectos, ex ratione areæ APS feu BPS ad totam Ellipfeos aream. Sit C, Centrum Ellipfeos, CE, ad AB perpendicularis = femiaxi majori; CD femiaxis minor; & defcripto fuper Diametrum AB femicirculo AEB, demittatur a P, PM ad AB perpendicularis, quæ producta circulo occurrat in N. Ob PM : MN = CD : CE eft area APS ad totam Ellipfin, ut area ANS ad aream circuli totam; quare etiam, facto ACX = ANS, fector ACX ad totum circulum eandem habet rationem quam habet tempus quo percurritur AP ad totum tempus Periodicum. Sed arcus AX eft ad totam circuli peripheriam ut fector ACX ad totum circulum; unde etiam arcus AX feu angulus ACX tempori erit proportionalis. Hic angulus ACX feu arcus AX vocatur *anomalia media;* angulus ACN feu arcus AN *anomalia circuli excentrici*, & angulus ASP *anomalia vera*. Brevitatis caufsa in feqq. ubique defignabimus anomaliam mediam littera $z$, anomaliam excentrici littera $x$, & anomaliam veram littera $v$. R exprimet numerum fcrupulorum fecundorum quos conti-

---

lio calcurare docuerunt; quorum tamen methodos, ob faciliorem cum aliis comparationem, in feqq. ita dabimus, ut etiam illæ ad Aphelium reducantur.

continet arcus circuli radio æqualis, seu R = 206264''8. Erit etiam semiaxis Ellipseos major AC = BC = EC = SD = 1; & excentricitas CS = CF vocabitur *e*, atque CD = $\sqrt{1-e}$ vocabitur *b*. Ex datis igitur *e*, *z* quæritur *v*; & hocce Problema illud est, quod *Problema* KEPLERI vocatur; cujus solutiones quasdam Trigonometricas, quantum vires permiserint juveniles, examinare nobis proposuimus.

## §. II.

In antecessum vero ostendendum est, quomodo ex data anomalia excentrici = $x$, inveniantur anomalia media = $z$ & anomalia vera = $v$. Quoniam est sector ACX = areæ ANS, erit sector NCX = Triangulo NCS, &, ducto ST ad CN perpendiculari, NX = $z$-$x$ = ST = *esinx*; unde $z$ = $x$ + *esinx*. Quoniam vero $z$ & $x$ in gradibus, minutis & secundis vulgo exprimuntur, convertendum est factum *esinx* in easdem circuli partes, inferendo: ut 1 ad R ita *esinx* ad arcum circuli facto *esinx* æqualem. Cfr. DE LA HIRE Tractatum *de motu Planetarum, inprimis vero Lunæ, Actis Acad. Paris.* pro A:o 1710 insertum, & *Astronomie* par JEROME LE FRANCAIS (LA LANDE) 3:e Edition, T. II. p. 24 Relationem vero inter $x$ & $v$ ut exprimat DE LA HIRE l. c. quærit primum PM ex analogia 1 : *b* = *sinx*: PM = *b sinx*. Ob CM = *Cosx*, erit SM = *e* + *Cosx*; unde facta analogia SM: MP = *r*: *tg* PSM, seu *e* + *Cosx*:

 *bsinx*

$b\sin x = 1 : tgv$, habetur sequens formula ad inveniendam $v$ $tgv = \frac{b\sin x}{e + \cos x}$.

CASSINI vero in Tractatu suo *de prima Planetarum æquatione secundum hypothesin* KEPLERI, qui in Actis Acad. Parif. pro A:o 1719 reperitur, quærit primum angulum ASN ex analogia $NC + CS : NC - CS = tg\, \frac{CSN + CNS}{2} : tg\, \frac{CSN - CNS}{2}$ seu $1 + e : 1 - e = tg\, \frac{1}{2} x : tg$ arcus addendi ad $\frac{1}{2} x$ ut habeatur ASN; quo dato, innotescunt tres termini in analogia $(NM : PM =)\ EC : DC = tg\, ASN : tg\, ASP$ seu $1 : b = tg\, ASN : tgv$; unde quartus etiam invenitur.

DE LA LANDE l. c. p. 23 aliam dedit formulam, eamque faciliorem, qua invenitur eadem $v$. Est $tg\,\frac{1}{2}v : tg\,\frac{1}{2}x = \frac{PM}{SP + SM} : \frac{NM}{CN + CM}$ vel $= \frac{CD}{SP + SM} : \frac{CE}{CN + CM}$ ob $PM : NM = CD : CE$. Sit $CM = \zeta$, $SP = 1 + \xi$, $PF = 1 - \xi$; erit $PM^2 = \overline{1 - \xi}^2 - \overline{\zeta - e}^2 = \overline{1 + \xi}^2 - \overline{\zeta + e}^2$; unde habetur $\xi = e\zeta$ & $SP = 1 + e\zeta$ & $SP + SM = \overline{1 + \zeta}.\overline{1 + e}$; quare etiam $tg\,\frac{1}{2}v : tg\,\frac{1}{2}x = \frac{b}{(1+\zeta)(1+e)} : \frac{1}{1+\zeta} = b : 1 + e = \sqrt{1-e} : \sqrt{1+e}$, & $tg\,\frac{1}{2}v = \frac{\sqrt{1-e}.\,tg\,\frac{1}{2}x}{\sqrt{1+e}}$

(seu

(seu si anomalias a Perihelio calculare mavis, $tg\frac{1}{2}v = \frac{\sqrt{1+e}.\ tg\frac{1}{2}x}{\sqrt{1-e}}$ ut DE LA CAILLE in *Lectionibus Astronomiæ* demonstrat. Cfr. *Append. ad Lect. Elem. clarissimi viri* DE LA CAILLE, Viennæ, Pragæ & Tergesti 1762, p. 17.

Exempli caussa calculavimus pro Mercurio, cujus excentricitas = 0. 20563, anomaliam veram, data anomalia excentrici = 95°.

$$\begin{aligned} Log.\ e. &= \bar{1}.\ 3130865 \\ Log.\ sin x &= \bar{1}.\ 9983442 \\ Log.\ R. &= 5.\ 3144251 \\ \hline Log.\ \overline{z-x} &= 4.\ 6258558 \end{aligned}$$

$z \cdot x = 42252''8 = 11° 44' 12''8;\ z = 106° 44'' 12'' 8.$

Ad inveniendam $v$ ex formula D:ni DE LA HIRE $tgv = \frac{b sin x}{e + Cos x}$, habetur $Cos x = -$ 0. 087156, & $e + Cos x =$ 0. 118474.

$$\begin{aligned} Log.\ b sin x &= \bar{1}.\ 9889626 \\ Log.\ (e + Cos x) &= 1.\ 0736230 \\ \hline Log.\ tgv &= 0.\ 9153396 \end{aligned}$$

$v = 83° 4' 16'' 2$

 Secun-

Secundum CASSINI eadem $v$ sequenti modo erit invenienda.

$$Log.\ \overline{1 - e} = \bar{1}.\ 9000228$$
$$Log.\ tg\ \tfrac{1}{2}\ x = 0.\ 0379475$$
$$\bar{1}.\ 9379703$$
$$Log\ \overline{1 + e} = 0.\ 0812140$$
$$Log.\ tg\ 35°\ 43'4''2 = \bar{1}.\ 8567563$$

ASN $= 83°\ 13'\ 4''\ 2$

$$Log.\ tg\ ASN = 0.\ 9247192$$
$$Log.\ b = \bar{1}.\ 9906184$$
$$Log.\ tgv = 0.\ 9153376$$

$v = 83°\ 4'\ 16''\ 2$

Commodissime vero invenitur $v$ ex formula D:ni DE LA LANDE $tg\ \tfrac{1}{2}\ v = \dfrac{\sqrt{1 - e}\ tg\ \tfrac{1}{2}\ x}{\sqrt{1 + e}}$.

$$Log.\ \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} = \bar{1}.\ 9094044$$
$$Log\ tg\ \tfrac{1}{2}\ x = 0.\ 0379475$$
$$Log.\ tg\ \tfrac{1}{2}\ v = \bar{1}.\ 9473519$$

$\tfrac{1}{2}\ v = 41°\ 32'\ 8''1;\ v = 83°\ 4'\ 16''\ 2$

Pro Marte, data $e = 0.093088$, & $x = 32°\ 56'27''6$ invenitur $z = 35°\ 50'\ 28''\ 5$, & $v = 30°\ 8'\ 40''2$

§. 3.

## §. III.

Difficilius vero est invenire $x$ ex datis $e$ & $z$. Ipse KEPLER nullam hujus Problematis directam solutionem invenit, neque inveniri posse existimavit. Quare in *Epit. Astron. Copernic.* p. 695 (citante Editore *Astronomiæ* D:ni DAV. GREGORII, Genevæ 1726, in Præf. LVIII. nam nobis non contigit, ipsum KEPLERI librum inspicere) dicit: "Hic via directa nulla est, sed adhibenda est ei qui hoc sine tabulis vult computare, regula Positionum: ponendo scil. anomaliam Excentri tantam vel tantam, eique sic sumtæ comparando suam Anomaliam mediam. Nam si ea tanta prodit, quanta proposita fuit, bene erat posita anomalia excentri; at si non tanta prodit, ex eo quod prodit emendanda erit positio laborque repetendus:" Quoniam vero talem calculum admodum prolixum & operosum fieri animadvertit, pro singulis Planetis primariis calculavit correspondentes anomalias veras mediasque pro quovis gradu anomaliæ excentrici; quas, una cum distantia Planetæ a Sole, *Tabulis* suis *Rudolphinis* inseruit. Quo facto, anomaliam veram, anomaliæ mediæ correspondentem, vel in Tabulis statim inveniebat, vel facile inde eruebat.

## §. IV.

Quo vero prolixos illos calculos, quos ad solvendum hocce Problema in hypothesi de areis tempori proportionalibus necessarios judicavit, evita-

ret

ret SETH WARD (*) aliam adoptavit hypothefin, fingendo, motum Planetarum ex altero Ellipfeos foco fpectatum esfe æquabilem; adeo ut angulus AFP eandem femper habeat rationem ad quatuor rectos, quam habet tempus quo percurritur AP ad totum tempus periodicum. Hanc hypothefin ipfe KEPLER jam antea examinavit, & illam inprimis pro ☿ & ♂ valde mancam deprehendit. Pofito AFP = $z$, producatur FP ad Q donec fiat QP = PS, erit QF = axi Ellipfeos majori; & facta analogia FQ + FS: FQ - FS = $tg\ \frac{FSQ + FQS}{2} : tg\ \frac{FSQ - FQS}{2}$, erit ob $\frac{FQ + FS}{2} = 1 + e$, $\frac{FQ - FS}{2} = 1 - e$, $\frac{FSQ + FQS}{2} = \frac{1}{2} z$ & $\frac{FSQ - PQS}{2}$, $\frac{1}{2} v$ $1 + e : 1 - e = tg\ \frac{1}{2} z : tg\ \frac{1}{2} v = \frac{1 - e\ tg\ \frac{1}{2} z}{1 + e}$.

Hæc hypothefis, quæ *hypothefis Elliptica fimplex* audit, explicata fuit a SETH WARD in *Aftronomia Geometrica*, A:o 1656 edita; unde etiam *hypothefis* WARDI nominatur. (**).

Quo

(*) Cfr. GREGORII *Aftron. Elem.* L. III. Prop. 5. Schol. & prop. 6. KEILL *Introd. ad veram aftron.* Lect. XXV p. 440 fqq. & DE LA LANDE l. c. p. 34 fq.

(**) DE LA LANDE l. c. p. 34. "Les Anglois ont donné à l'hypothese elliptique fimple le nom d'*hypothese de Ward:* c'eft le nom que lui donnent Keill & M. le

Quo vero accuratior evaderet hæc methodus, sequentem dedit BOULLIAUD (*) correctionem. Posito AFP $=z$, erit Planeta in Y, puncto, ubi Ellipsi occurrit recta FN, ducta a foco F ad N, ubi circulus, Diametro AB descriptus, secatur a linea MN ad AB per P perpendiculari; adeoque angulus ASY $=v$. Est jam MP: MN $=$ CD: CE $=$ $tg$ MFP: $tg$ MFN, seu $b$: $1 = tgz : tg$ AFY; & facto YG $=$ YS, erit $\frac{FG+FS}{2} : \frac{FG-FS}{2} = tg\ \tfrac{1}{2}$ AFY: $tg\ \tfrac{1}{2}$ ASY h. e. $1+e : 1-e = tg\ \tfrac{1}{2}$ AFY: $tg\ \tfrac{1}{2} v = \frac{\overline{1-e}\ tg\ \tfrac{1}{2}\ \text{AFY}}{1+e}$.

## §. V.

NEWTON in libro *Principiorum* 1:o, Prop. 31, hocce Problema solvit ope Trochoidis; quæ curva

 commu-

---

Monnier - - quoique Mercator & Ward lui-même aient cité Boulliaud, comme le premier auteur dans cette matiere".

(*) Ita KEILL l. c. p. 442 sq. & GREGORIUS l. c. prop. VII p. 324. DE LA LANDE vero illam tribuit D:no ROBERT ANDERSSON dicens l. c. "Cette hypothese (hypoth. ellipt. simple) a été employée par Street dans ses tables carolines, mais avec une correction que Keill attribue à Boulliaud, par erreur; il paroit que Street la tenoit de Robert Andersson".

communiter Cyclois vocatur; ob difficilem vero hujus curvæ descriptionem, l. c. in Scholio duas tradit methodos approximandi.

Invento vel conjectura vel rudi constructione angulo quodam $x'$, anomaliæ excentrici propemodum æquali, quæratur 1:o $u = \frac{z - x' \cdot Resinx'}{1 + e\,Cosx'}$; & $x'' = x' + u$

2:o $u' = \frac{z\ x'' - Resinx''}{1 + e\,Cosx''}$; $x''' = x'' + u'$ seu

$x''' = x' + u + u'$

3:o $u'' = \frac{z \cdot x''' - Resinx'''}{1 + e\,Cosx'''}$; $x^{IV} = x''' + u'' = x' + u + u' + u''$

4:o $u''' =$ &c.

Est jam $x - x^{I} > x' - x^{II} > x^{III} - x^{IV} >$ &c. seu accedunt anguli $x^{I}$, $x^{II}$, $x^{III}$, $x^{IV}$ &c magis magisque ad æqualitatem cum $x$.

Eandem hanc methodum sequenti analysi invenit Klingenstjerna in *Dissertatione de methodo Geometrica determinandi Orbitas Planetarum*, Upsaliæ A:o 1749 ventilata. Sit $x = x^{I} + u$, erit $sinx = sinx^{I}$ $Cosu + sinu\ Cosx^{I}$. Cum vero $u$ sit parvus, parum omnino differt a suo sinu: quare $Sinu = u$, & $Cosu = 1$; unde $sinx = Sinx^{I} + u\ Cosx^{I}$, adeoque $z = x + esinx = x^{I} + u + esinx^{I} + eu\ Cosx^{I}$, & $u = \frac{z\ x^{I} - esinx^{I}}{1 + e\ Cosx^{I}}$; seu quia in scrupulis secundis exprimi debet, =

z-x

$\frac{z - x^{I} - eR\,\text{ſin}\,x^{I}}{1 + e\,\text{Coſ}\,x^{I}}$. Poſito iterum $x^{I} + u = x^{II}$ in formula loco $x'$ habetur $u' = \frac{z - x^{II} - eR\,\text{ſin}\,x^{II}}{1 + e\,\text{Coſ}\,x^{II}}$ & $u^{II} =$ &c.

Convergit hæc ſeries $x = x^{I} + u + u' + u^{II} + \ldots$ celerrime, adeo ut vix unquam opus ſit, calculum ultra ſecundum vel tertium terminum extendere.

Huic ſolutioni alteram ſubjungit NEWTON, quam uſibus Aſtronomicis accommodatiorem pronunciat. Sit D differentia inter ſemiaxem minorem & ſemilatus rectum, adeoque $= b.\overline{1-b}$. Inveniatur angulus, Y, cujus ſinus ſit ad radium, ut rectangulum ſub D & ſemiſumma axium ad quadratum axis majoris, ſeu Sin Y $= \frac{b.\overline{1-b}.\overline{1+b}}{4}$; & inveniatur etiam Z, cujus Sinus ſit ad radium ut duplum rectangulum ſub umbilicorum diſtantia & D ad triplum quadratum ſemiaxis majoris; ſeu ſin Z $= \frac{4\,eb.\overline{1-b}}{3}$. Quæratur deinde V, (quem primam medii motus æquationem vocat) qui ſit ad Y (æquationem maximam primam) ut Sinus dupli anguli $z$ ad radium, ſeu V $=$ Yſin$2z$; & X (æquatio ſecunda) qui ſit ad Z (æquationem maximam Secundam, ut cubus ſinus anomaliæ mediæ $z$ ad cubum radii, ſeu X $=$ Z Sin $^{3}$ $z$. Capiatur angulus AFY $= z +$ X $+$ V, & datur $v$ ex analogia $1 + e : 1 - e = tg\,\tfrac{1}{2}$ AFY $: \text{tg}\,\tfrac{1}{2}\,v$.

 Hanc

Hanc solutionem fuse, pro more suo, explicarunt D:ni LE SEUR & JACQUIER in notis ad *Principiorum* librum l. c. Potest etiam illa haberi tamquam correctio quædam hypotheseos WARDI.

## §. VI.

CASSINI in Tractatu jam laudato sequentem dedit hujus problematis solutionem. Junctis S, X, ductaque XO ad CN parallela, erit OS = differentiæ inter arcum NX ejusque sinum TO. Ubi ille arcus seu angulus NCX parvus est, differentia inter illum ejusque sinum negligi prorsus potest; suntque tum NC & SX ad sensum parallelæ, & NCX = CXS. Cum etiam sit in triangulo CXS, CX + CS : CX - CS = $tg\ \frac{CXS + CSX}{2} : tg\ \frac{CSX - CXS}{2}$ vel $1 + e : 1 - e = tg\ \frac{1}{2}\ z : tgy$ seu $tg$ arcus auferendi ab $\frac{1}{2}\ z$ ut habeatur CXS, habetur $tgy = \frac{1 - e.\ tg\ \frac{1}{2}\ z}{1 + e}$ & CXS = NCX = $z - x = \frac{1}{2}\ z - y$, unde $x = \frac{1}{2}\ z + y$. Si vero CXS gradum & dimidium superat, quæratur latus SX ex analogia $Sin\ (\frac{1}{2}\ z - y) : Sin z = e :$ SX $= \frac{e\,sin z}{sin\ (\frac{1}{2}\ z - y)}$. Deinde inveniatur SO, differentia inter arcum NX = $a$ seu CXS ei fere æqualem, ejusque Sinum; quem in finem Tabulam l. c. construxit CASSINI, exhibentem differentiam inter arcum ejusque Sinum a $O^{\circ}$ ad $13^{\circ}$; quæ vero differentia sine ista Tabula facile computari potest. Quum scil. sit $Sin a = a - \frac{a^3}{2.3} + \frac{a^5}{2.3.4.5} - \frac{a^7}{2.3.4.5.6.7} + \ldots$ habetur $a - Sin a = SO = a \left(\frac{a^2}{2.3} - \frac{a^4}{2.3.4.5} + \frac{a^6}{2.3.4.5.6.7} - \&c.\right)$ quamobrem si non sit $a > 13°$ erit sine errore $0''5$ semper $SO = \frac{a^3}{6}$, vel in scrupulis secundis, $SO = \frac{a^3}{6R^2}$. Facta deinde analogia $\frac{e \sin x}{Sin(\frac{1}{2}z - y)} : SO = 1 : \sin SXO$, seu cum angulus SXO parvus sit, adeoque a suo sinu parum differat, $= 1 : SXO$, habetur $SXO = u = \frac{SO\ Sin\ (\frac{1}{2}z - y)}{e \sin z}$ adeoque quoniam $NCX = z - x = CXO = \frac{1}{2}z - y - u$, $x = \frac{1}{2}z + y + u$.

## §. VII.

In *Lectionibus Astronomiæ* docet etiam DE LA CAILLE, quomodo inveniatur $x$, datis $e$ & $z$ (*). Est $1 + e : 1 - e = tg\ \frac{1}{2}z : tg\ y$; quo arcu addito ad $\frac{1}{2}z$, habetur $x'$ seu anomalia excentrici primo ap-

 pro-

(*) In editione Lectionum ejus Astron. Viennæ, Pragæ & Terg. A:o 1757 impressa, p. 69 sqq. quam nos sumus secuti, habetur Aphelium pro origine Anomaliarum. In Appendice vero ad has Lectiones ibid. A:o 1762 edita, p. 13 sqq. Anomaliæ a Perihelio supputantur.

proximata. Cum vero ſit $z = x + e \sin x . R$, poſito $\operatorname{Sin}(\frac{1}{2} z + y)$ loco $\sin x$, habetur $z = x + e R \sin(\frac{1}{2} z + y)$ & $x''$ ſeu anomalia excentrici ſecundo approximata $= z - e R \sin(\frac{1}{2} z + y)$. Eodem modo erit $x''' = x$ tertio approximatæ $= z - e R \sin x''$ & ſic calculus extendi debet, donec eadem $x$ bis inveniatur. Ultra tertiam approximationem raro opus eſt progredi.

## §. VIII.

Omnes hæ methodi anomaliam veram eliciendi, ſunt tantum approximationes; quo vero quodammodo judicari poſſit, quænam earum ſit maxime exacta, anomaliam veram pro Marte & Mercurio calculavimus, ita ut exemplo uſi ſimus ei inverſo quo p. 5 ſq. utebamur. Datam nempe ſuppoſuimus anomaliam mediam Mercurii $= 106° \; 44' \; 12'' \; 8$, & Martis $= 35° \; 50' \; 28'' \; 5$,

In hypotheſi Wardi habetur $v$ pro ☿,

| | |
|---|---|
| addendo $Log.\ tg\ \frac{1}{2} z =$ | $\bar{0}.\ 1287071$ |
| ad $Log.\ (1 - e) =$ | $\bar{1}.\ 9000228$ |
| & ex eorum ſumma $=$ | $0.\ 0287299$ |
| ſubtrahendo $Log.\ (1 + e) =$ | $0.\ 0812140$ |
| quod enim reſtat $=$ | $\bar{1}.\ 9475159$ |

eſt $log\ tg\ \frac{1}{2} v$; unde $\frac{1}{2} v = 41° \; 32' \; 46'' \; 7$ & $v = 83° \; 5' \; 33'' \; 4$. Error $= 1' \; 17'' 2$.

Eodem modo invenitur $v$ pro ♂ in noſtro exemplo $= 30° \; 2' \; 18'' \; 5$, & error $= 6' \; 21'' 7$. Elegans

ſane

fane & facilis esset hæc solutio, si verum fuisset quod suppofuit SETH WARD, ita moveri Planetas, ut semper æqualibus temporibus æquales circa alterum focum anguli describerentur. Cum Planetæ circa Quadraturas sunt, locus eorum secundum hanc hypothesin inventus a vero loco non adeo multum differt; quando vero a Quadraturis sunt remotiores, major erit error, ut pro ♂ in nostro exemplo; & maximus erit dum Planetæ circa octantes versantur.

Neque exacte invenitur $v$, adhibita memorata illa correctione, quæ interdum a vero multo magis aberrat quam ipsa hypothesis WARDI.

Pro ☿ $Log\text{-}tgz = 0.\ 5218431$
$Log.\ b = \bar{1}.\ 9906184$

$Log\ 73^\circ\ 36'\ 4''\ 9 = 0.\ 5312247$
unde AFY $= 106^\circ\ 23'\ 55''\ 1$ & $\frac{1}{2}$ AFY $= 53^\circ\ 11'\ 57''\ 5$
$Log\ tg\ \frac{1}{2}$ AFY $= 0.\ 1260319$
$Log.\ \overline{1-e} = \bar{1}.\ 9000228$

$0,\ 0260547$
$Log.\ \overline{1+e} = 0.\ 0812140$

$Log.\ tg\ \frac{1}{2}\ v = \bar{1}.\ 9448407$
$\frac{1}{2}\ v = 41^\circ\ 22'\ 16''\ 3$, $v = 82^\circ\ 44'\ 32''\ 6$, adeoque error $= 19'\ 43''\ 6$.

In exemplo pro ♂ habetur $v = 30^\circ\ 8'\ 22'''\ 8$ & error tantum $= 17'\ 4$.

Per

Per feriem vero NEWTONI $x = x' + u + u' + u'' +$ &c invenitur $x$, adeoque etiam $v$ fatis exacte.

Sit pro ☿ $x' = 90°$ — $Log\ R = 5.3144251$
$z - x' = 16° 44' 42'' 8$ — $Log.\ e = \bar{1}.3130865$
$e\ R\ sin x'\ 11° 46' 54'' 2$ — $Log\ sin x' = 0.0000000$

$Log.\ e\ R\ sin x' = 4.6275116$

$z - x' - e\ R\ sin x' = u = 4° 57' 18'' 6$
$x'' = x' + u = 94° 57' 18'' 6$
$z - x'' = 11° 46' 54'' 2$ — $Log\ sin x''\ \bar{1}\ 9983738$

$Log\ R = 5.3144251$
$Log.\ e = \bar{1}.3130865$

$Log\ e\ R\ sin x'' = 4.6258854$

$e\ R\ sin x'' = 11° 44' 15'' 7$
$z - x'' - e\ R\ sin x'' = 2' 38'' 5 = 158'' 5$
$e\ Cos x'' = -0.017761.$ — $L.\ 158'' 5 = 2.2000293$
$1 + e\ Cos x'' = 0.982239$ — $L.(1 + e\ Cos x'') = \bar{1}.9922171$

$Log.\ u' = 2.2078122$

$u' = 2' 41'' 4$
$x''' = x'' + u' = 95°$; unde $v = 83° 4' 16'' 2$ (p. 6.)
Eft heic error pro $x' = 5°$; pro $x'' = 2' 41'' 4$; pro $x'''$ vero nullus usque ad fcrupulos fecundos.

Pro ♂, pofitis $x' = 30°$ & $z = 35° 50' 28'' 5$; habetur $z - x' = 5° 50' 28'' 5$;
$e\ R\ sin x' = 2° 40' 0'' 3$; $z - x' - e\ R\ sin x' = 3° 10' 28'' 2$;
$1 + e\ Cos x' = 1.080616$;
$u = 2° 56' 15'' 6$
$x'' = 32° 56' 15'' 6$;
$u' = 12''$;

$x''' =$

$x''' = x'' + u' = 32^\circ\, 56'\, 27''\, 6$; unde $v = 30^\circ\, 8'\, 40''\, 2$. Error pro $x'$ est $= 2^\circ\, 56'\, 27''\, 6$; pro $x'' = 12''$; $x'''$ est usque ad minuta Secunda exacta

Altera illa methodus NEWTONI facilior quidem est quam hæc jam laudata, cum necesse non sit, angulos $Y$ & $Z$ nisi semel pro quovis Planeta calculare; multum vero abest, ut sit tam accurata.

| | |
|---|---|
| | Pro ☿ erit $\log b = \bar{1}.\ 9906184$ |
| | $\text{Log.}\ \overline{1-b} = \bar{2}.\ 3298045$ |
| | $\text{Log.}\ 1+b = 0.\ 2963646$ |
| | $\bar{2}.\ 6167875$ |
| | $\text{Log}\ 4 = 0.\ 6020600$ |
| $Y = 35'\ 34''$ | $\text{Log}\ \sin Y = \bar{2}\ 0147275$ |
| | $\text{Log.}\ \frac{4}{3} = 0.\ 1249388$ |
| | $\text{Log.}\ e = \bar{1}.\ 3130865$ |
| | $\text{Log.}\ b = \bar{1}.\ 9906184$ |
| | $\text{Log.}\ 1-b\ \bar{2}.\ 3298045$ |
| $Z = 19'\ 43''$ | $\text{Log.}\ \sin Z = \bar{3}.\ 7584482.$ |
| | $\text{Log.}\ Y. = 3.\ 3291944$ |
| | $\text{Log} - \sin 2z = \bar{1}.\ 7415890$ |
| | $\text{Log}\cdot V = 3.\ 0707834$ |
| $V = -\ 19'\ 37''$ | |
| | $\text{Log.}\ Z = 3.\ 0729847$ |
| | $\text{Log.}\ \sin^3 z = \bar{1}.\ 9436030$ |
| | $\text{Log.}\ X = 3.\ 0165877$ |



$X =$

$X = 17' \; 19''$

$\frac{z + X + V}{2} = 53° \; 20' \; 57'' \, 4$; cujus *tg log* $= 0. \; 1284037$

$$Log. \; \overline{1 - e} = \bar{1}. \; 9000228$$

$$0. \; 0284265$$

$$Log. \; \overline{1 + e} = 0. \; 0812140$$

$$Log \; tg \; \tfrac{1}{2} \, v = \bar{1}. \; 9472125$$

$\frac{1}{2} v = 41° \; 31' \; 35''$
$v = 83° \; 3' \; 10''$; error $= 1' \; 6'' \, 2$

Pro ♂ erit $V = 7' \; 25'' \, 7$; $Z = 1' \; 53''$ & in noſtro exemplo $V = 7' \; 3'' \, 1$; $X = 18''$; $\frac{z + X + V}{2} = 17° \; 58' \; 54'' \, 8$ & $v = 30° \; 8' \; 35'' \, 2$; error $5''$.

Secundum Cassini calculus ſic erit inſtituendus. Pro ☿ inveniatur $y = 41° \; 32' \; 46'' \, 7$, $\frac{1}{2} z - y = a = 11° \; 49' \; 19'' \, 7. = 42559'' 7$

$$Log \; a^3 = 13. \; 8869955$$
$$Log \; 6 \; R^2 = 11. \; 4070014$$
$$Log. \; \frac{a^3}{6 R^2} = 2. \; 4799941.$$
$$Log. \; \mathit{ſin} \, a = \bar{1}. \; 3114873$$
$$1 \; 7914814$$
$$Log. \; e \, \mathit{ſin} \, z = \bar{1}. \; 2942878$$
$$Log. \; u = 2. \; 4971936$$

$u =$

$u = 5' \, 14'' \, 1$; $x = \frac{1}{2} z + y + u = 95^\circ \, 0' \, 7'' \, 2$; $v = 83^\circ \, 4' \, 23'' \, 4$; error $= 7'' \, 2$. Pro ♂ erit $y = 15^\circ \, 1' \, 9'' \, 2$; $\frac{1}{2} z - y = 2^\circ \, 54' \, 5''$; $\frac{a^3}{6R^2} = 4'' \, 4$, $u = 4'' \, 1$ & $x = 32^\circ \, 56' \, 27'' \, 5$; adeoque error pro $x = 0'' \, 1$.

Optimum forſan erit adhibere ſolutionem D:ni DE LA CAILLE, quæ facilis eſt & ſimul exacta.

Pro ☿ erit $y = 41^\circ \, 32' \, 46'' \, 7$; $\frac{1}{2} z + y = 94^\circ \, 54' \, 53'' \, 1$.

$$Log.\ Sin\ (\tfrac{1}{2} z + y) = \bar{1}.\ 9984002$$
$$Log.\ e = \bar{1}.\ 3130865$$
$$Log.\ R = 5.\ 3144251$$
$$Log\ e\ R\ Sin\ (\tfrac{1}{2} z + y) = 4.\ 6259118$$

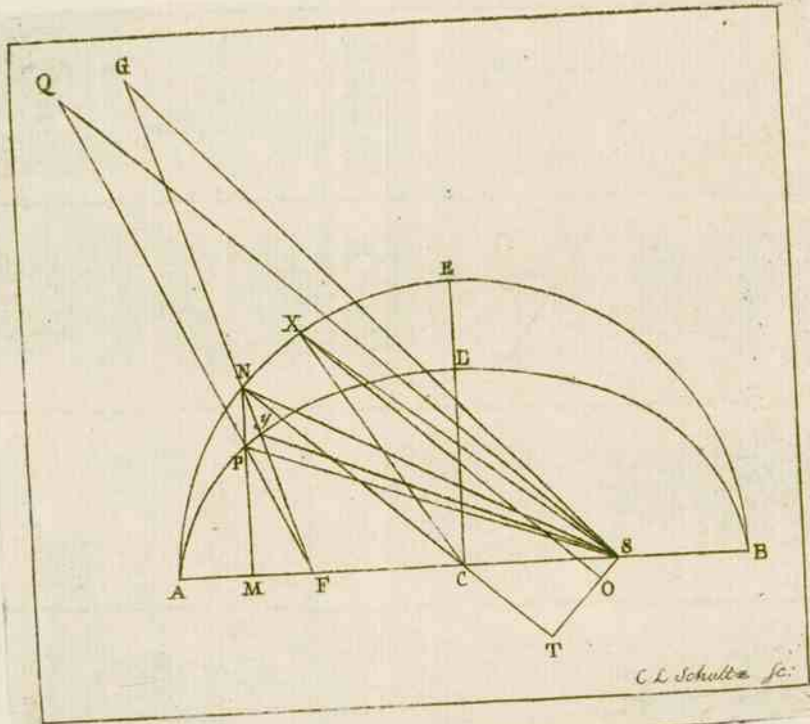
$e\,R\,Sin\,(\frac{1}{2} z + y) = 11^\circ \, 44' \, 18'' \, 2$

$z - e\,R\,Sin\,(\frac{1}{2} z + y) = 94^\circ \, 59' \, 54'' \, 6$ cujus $Sin\ log.\ \bar{1}.\ 9983452$

$$Log\ e = \bar{1}.\ 3130865$$
$$Log\ R = 5.\ 3144251$$
$$Log.\ 11^\circ \, 44' \, 12'' \, 8 = 4.\ 6258568$$

$z - 11^\circ \, 44' \, 12'' \, 8 = x = 95^\circ$; $v = 83^\circ \, 4' \, 16'' \, 2$.
Pro prima approximatione error in noſtro exemplo $= 5' \, 6'' \, 9$; pro ſecunda $= 5'' \, 4$, pro tertia $= 0'' 0$.

Pro ♂ erit $\frac{1}{2} z + y = 32^\circ \, 56' \, 23'' \, 4$; $e\,R\,Sin\,(\frac{1}{2} z + y) = 2^\circ \, 54' \, 0'' \, 5$; $z - e\,R\,Sin\,(\frac{1}{2} z + y) = 32^\circ \, 56' \, 28''$; $e\,R\,Sin\,x' = 2^\circ \, 54' \, 0'' \, 9$; $x = 32^\circ \, 56' \, 27'' \, 6$; $v = 30^\circ \, 8' \, 40'' \, 2$. Error in prima approximatione $= 4'' \, 2$; in ſecunda $= 0'' \, 4$ in tertia $= 0'' 0$.


Q
G
E
X
D
N
v
P
S
B
A
M
F
C
O
T
C L Schultze fc: